

Паспорт
расчетно-графического задания (работы)

по дисциплине «Линейная алгебра», 1 семестр

1. Методика оценки

В рамках расчетно-графического задания (работы) по дисциплине студенты должны решить ряд задач на различные темы всего курса.

При выполнении расчетно-графического задания (работы) студенты должны изучить весь теоретический материал курса и применить его при решении практических задач.

Обязательные структурные части РГЗ. Все задания РГЗ(Р) являются обязательными для выполнения.

Оцениваемые позиции: Отдельно оценивается каждое задание.

2. Критерии оценки

- Работа считается **не выполненной**, если выполнено 25 % заданий РГЗ (Р), оценка составляет 5 баллов.
- Работа считается выполненной **на пороговом** уровне, если выполнено 50 % заданий РГЗ (Р), оценка составляет 10 баллов.
- Работа считается выполненной **на базовом** уровне, если выполнено 75 % заданий РГЗ (Р), оценка составляет 15 баллов.
- Работа считается выполненной **на продвинутом** уровне, если выполнено 100 % заданий РГЗ (Р), оценка составляет 20 баллов.

3. Шкала оценки

В общей оценке по дисциплине баллы за РГЗ(Р) учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

4. Примерный перечень тем РГЗ(Р)

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 , площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 , объем пирамиды.

$$A_1(8, 6, 4), \quad A_2(10, 5, 5), \quad A_3(5, 6, 8), \quad A_4(8, 10, 7)$$

Задача 2. На прямой $2x + y + 11 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух заданных точек $A(1, 1)$ и $B(3, 0)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A .

$$(\alpha) \frac{x-3}{5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{1}, \quad A(4, 2, -1)$$

Задача 4. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой:

$$M(1, 2, 3), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ методом Крамера и систему $CX = Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\text{rank } A$, $\text{rank}(GBF)$, $\text{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d : $a_1 = (-2, 1, 1)$, $a_2 = (0, 3, 3)$, $a_3 = (2, 0, -2)$, $d = (2, 4, 0)$.

Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 3, 4)$, $a_3 = (3, 2, 3)$, $a_4 = (1, 1, 1)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а) Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости xOz , а затем сжатие по оси Oy в два раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A . Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & \gamma \\ \beta & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.

б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$.

в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z . Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат xOy .

1) $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 = 24$;

2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Для обеих кривых:

а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy' .

б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.

в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.

г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.